

# Βάσεις Groebner

## Δευτέρα 12 Σεπτεμβρίου 2016

1. (2 μονάδες) Δίνεται ο δακτύλιος  $\mathbb{C}[x, y, z]$  εφοδιασμένος με την λεξικογραφική διάταξη με  $z > y > x$ . Βρείτε μία ανάγωγη βάση Groebner για το ιδεώδες

$$J = \langle x^2y + z, xz + y \rangle.$$

Ανήκει το πολυώνυμο  $x^3z^2 + x^2y^2 - xyz^2 - x^2y - y^3 + xz + z$  στο ιδεώδες  $J$ ;

2. (2 μονάδες) Έστω  $G$  μια ελαχιστική βάση Groebner του ιδεώδους

$$I = \langle x_1^n, x_2^{n-1}, \dots, x_i^{n-i+1}, \dots, x_{n-1}^2, x_n \rangle$$

του δακτυλίου  $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$  που είναι εφοδιασμένος με κάποια μονωνυμική διάταξη με  $x_1 > \dots > x_n$ . Βρείτε πόσα στοιχεία έχει η  $G$  και αποδείξτε ότι οποιαδήποτε  $G$  περιέχει ένα συγκεκριμένο μονώνυμο. Ποιό είναι αυτό; Βρείτε την ανάγωγη βάση Groebner του ιδεώδους  $I$ .

3. (2 μονάδες) Να υπολογίσετε μια βάση και την διάσταση του  $K$ -διανυσματικού χώρου  $K[x, y, z]/I$ , όπου  $I$  είναι το ιδεώδες

$$\langle x^2 + y^2 + z^2 - 7, y^3 - z^2, z^2 - 1 \rangle.$$

4. (2 μονάδες) Βρείτε μία ανάγωγη βάση Groebner για το ιδεώδες

$$I = \langle y^{2n}x - 3 \mid n \in \mathbb{N} \rangle$$

του δακτυλίου  $\mathbb{R}[x, y]$ , ως προς οποιαδήποτε διάταξη όρων.

5. (2 μονάδες) Στον πολωνυμικό δακτύλιο  $\mathbb{C}[x, y, z, u, v]$  με μονωνυμική διάταξη την *degrevlex* με  $x > y > z > u > v$  δίνεται το ιδεώδες

$$I = \langle x^4 - 1, y^4 - 1, z^4 - 1, u^4 - 1, v^4 - 1, x^3 + x^2y + xy^2 + y^3, x^3 + x^2z + xz^2 + z^3, x^3 + x^2u + xu^2 + u^3, x^3 + x^2v + xv^2 + v^3, z^3 + z^2y + zy^2 + y^3, v^3 + v^2y + vy^2 + y^3, u^3 + u^2y + uy^2 + y^3, u^3 + u^2z + uz^2 + z^3, u^3 + u^2v + uv^2 + v^3, z^3 + z^2v + zv^2 + v^3 \rangle.$$

Με ποιά συγκεκριμένο πρόβλημα της θεωρίας Γραφημάτων συνδέεται το παραπάνω ιδεώδες (εξηγήστε γιατί) και ποιά είναι η ανάγωγη βάση Groebner του  $I$ . Ποιά είναι η διάσταση του μιγαδικού διανυσματικού χώρου  $\mathbb{C}[x, y, z, u, v]/I$ .

Καλή επιτυχία